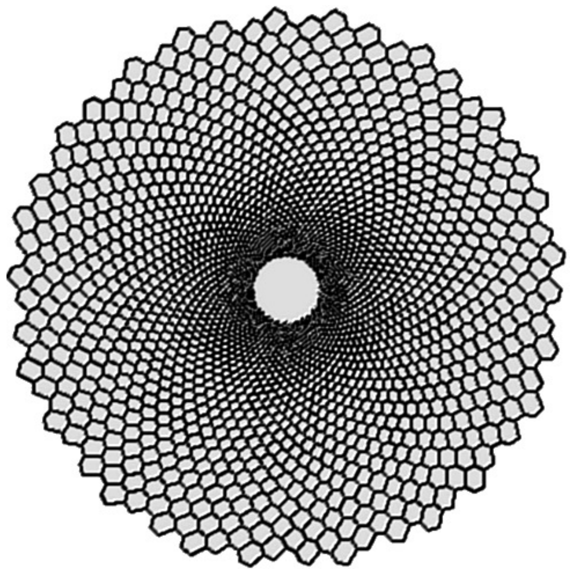
FIBONACCI UND DER GOLDENE SCHNITT

VON JOHANNES BECKER



Die Fibonacci-Zahlen 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... findet man an überraschenden Stellen in der Natur. Der goldene Schnitt wurde schon von den alten griechischen Mathematikern beschrieben und später als Prinzip in der künstlerischen Gestaltung erklärt. Diese zunächst ganz verschiedenen Dinge sind durch einen mathematischen Zusammenhang verbunden.

INHALTSVERZEICHNIS

1. Informationen im WWW

Es gibt sehr viele Seiten über Fibonacci und den Goldenen Schnitt. Eine sehr ausführliche ist:

http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/fib.html

Schöne Beispielbilder gibt es unter:

http://ccins.camosun.bc.ca/∼jbritton/fibslide/jbfibslide.htm

Weiter

http://pw1.netcom.com/∼merrills/fibphi.html

2. Die Kaninchenaufgabe

Im Jahre 1202 veröffentlichte Leornardo Fibonacci sein „Liber Abaci“ (Rechenbuch), eines der einflussreichsten Mathematikbücher. Es enthält folgende Aufgabe:

Wieviele Kaninchenpaare erzeugt ein einziges in einem Jahr?

Jemand setzte ein Kaninchenpärchen in einen gewissen Ort, der allseits mit Wänden umgrenzt war. Man wünscht zu wissen, wieviele Nachkommen dieses Paares in einem Jahr erzeugt werden.
Dabei seien sie so beschaffen, dass sie in jedem Monat ein neues Paar erzeugen; und ab dem zweiten Monat nach ihrer Geburt sind auch die jungen fruchtbar.

Quot paria coniculorum in uno anno ex uno pario germinentur.

Quidam posuit unum par cuniculorum in quodam loco, qui erat undique pariete circundatus, ut sciret, quot ex eo paria germinarentur in uno anno:
cum natura eorum sit per singulum mensem aliud par germinare; et in secundo mense ab eorum natiuitate germinant.

Das oben beschriebene Paar wirft im ersten Monat Junge, verdoppelt sich selbst, so dass es zwei Pärchen in einem Monat sind. Von diesen verdoppelt sich eines, nämlich das erste, im zweiten Monat; und so sind im zweiten Monat 3 Pärchen; von diesem werden in einem Monat zwei schwanger; und es entstehen im dritten Monat 2 neue Pärchen; und so sind es 5 Pärchen in diesem Monat; von diesen werden 3 Pärchen schwanger; so dass es im vierten Monat 8 Pärchen sind; von diesen erzeugen 5 Pärchen weitere 5 Pärchen: Diese werden zu den 8 Pärchen hinzugefügt, was 13 Pärchen im fünften Monat ergibt; von diesen werden jene 5, die in diesem Monat geboren wurden, nicht schwanger in diesem Monat, aber die anderen 8 werden es; und so sind es im sechsten Monat 21 Pärchen;	Quia suprascriptum par in primo mense germinat, duplicabis ipsum, erunt paria duo in uno mense. Ex quibus unum, scilicet primum, in secundo mense geminat; et sic sunt in secundo mense paria 3; ex quibus in uno mense duo pregnantur; et geminantur in tercio mense paria 2 coniculorum ; et sic sunt paria 5 in ipso mense; ex quibus in ipso pregnantur paria 3; et sunt in quarto mense paria 8; ex quibus paria 5 geminant alia paria 5: quibus additis cum parijs 8, faciunt paria 13 in quinto mense; ex quibus paria 5, que geminata fuerunt in ipso mense, non concipiunt in ipso mense, sed alia 8 paria pregnantur; et sic sunt in sexto mense paria 21;
dazu kommen 34 Pärchen, die sich im neunten Monat verdoppeln, so dass es in diesem 89 Pärchen werden; zu diesen werden wiederum 55 Pärchen addiert, die sich im zehnten Monat verdoppeln, das sind 144; dazu kommen wieder 89 Pärchen, die sich im elften Monat verdoppeln, das sind in diesem 233 Pärchen.	cum quibus additis parjis [sic] 34, que geminantur in nono mense, erunt in ipso paria 89; cum quibus additis rursum parijs 55, que geminantur in decimo mense 144; cum quibus additis rursum parijs 89, que geminantur in undecimo mense, erunt in ipso paria 233.
Zu diesen werden noch 144 Pärchen addiert, die im letzten Monat geboren werden, das sind 377 Pärchen; und alle Pärchen stammen von dem oben beschriebenenen Pärchen im bereitgestellten Ort während eines Jahres.	Cum quibus etiam additis parijs 144 , que geminantur in ultimo mense, erunt paria 377; et tot paria peperit suprascriptum par in prefato loco in capite unius anni.
Ihr könnt am Rand sehen, wie wir dir Rechnung ausgeführt haben, wir haben nämlich die erste Zahl mit der zweiten vereinigt, also 1 mit 2; und die zweite mit der dritten; und die dritte mit der vierten; und die vierte mit der fünften, und so fort, bis wir zur zehnten die elfte addiert haben, nämlich zu 144 die 233; und wir bekommen die oben erwähnte Summe der Kaninchen, nämlich 377; und so könnt Ihr es nach der Reihe mit einer unendlichen Zahl von Monaten machen.	Potes enim uidere in hac margine, qualiter hoc operati fuimus, scilicet quod iunximus primum numerum cum secundo, uidelicet 1 cum 2; et secundum cum tercio; et tercium cum quarto; et quartum cum quinto, et sic deinceps, donec iunximus decimum cum undecimo, uidelicet 144 cum 233; et habuimus suprascriptorum cuniculorum summam, uidelicet 377; et sic posses facere per ordinem de infinitis numeris mensibus.

parium
1
primus
2
Secundus
3
tercius
5
Quartus
8
Quintus
13
Sestus
21
Septimus
34
Octauus
55
Nonus
89
Decimus
144
Undecimus
233
Duodecimus
377

Übung:

(1) Erkläre die Kaninchenaufgabe mit eigenen Worten. Eine Tabelle, in der die Monate mit den dazugehörenden Anzahlen der Kaninchenpärchen aufgelistet sind, hilft dabei.
(2) Sind die Angaben über die Kaninchenaufgaben realistisch?

3. Leonardo Fibonacci

Leonardo Fibonacci, auch Leonardo Pisano (Leonardo aus Pisa) genannt, lebte etwa von 1170 bis nach 1240 und stammte wahrscheinlich aus Pisa in Italien.

Weil sein Vater Handelsbeziehungen mit Nordafrika hatte, reiste auch er zunächst dorthin, später auch nach Syrien, Griechenland, Sizilien und in die Provence. Auf den Reisen lernte er die Mathematik kennen, wie sie von den Arabern gepflegt wurde. Die Mohammedaner hatten die Tradition der babylonischen und griechischen Mathematiker und Astronomen weitergeführt, die damals im christlichen Abendland unbekannt waren. Die Naturwissenschaften erhielten nach 1200 auch durch Kaiser Friedrich II einen erste Aufschwung. Friedrich II schrieb selbst ein Buch über die Vogelzucht und förderte Wissenschaftler wie Fibonacci persönlich.

Fibonaccis „Liber abaci“ war auch deshalb sehr folgenreich, weil er darin die arabischen Ziffern (1,2,3,4,5,...) als die beste unter den ihm bekannten Zahlsystemen empfahl. Damals, und noch lange danach, wurden vorwiegend die römischen Zahlen (I,II,III,IV,V,...) benutzt. Leonardo hatte auf seinen Reisen verschiedene Systeme kennengelernt, wie man Zahlen notieren kann, unter anderem das der Babylonier. Er erkannte die Vorteile der indischen Methode. Wir nennen die indischen Ziffern heute arabische Ziffern bezeichnen, weil sie im Westen über die Araber bekannt wurde.

4. Die Fibonacci-Zahlen

Definition. Die Folge 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ... heißt die Fibonacci-Folge. Dabei erhält man das nächste Glied der Folge, indem man die zwei davor stehenden Zahlen addiert.

Bemerkung: Ausführlicher schreibt man $F_1 = 1,\ F_2 = 1,\ F_3 = 2,\ F_4 = 3,\ F_5 = 5,\ F_6 = 8, \dots$.
Dabei gilt $F_1 + F_2 = F_3,\ F_2 + F_3 = F_4,\ F_3 + F_4 = F_5, \dots$. Für diese Regeln schreibt man allgemein:

$$F_1 = 1$$
$$F_2 = 1$$
$$F_n + F_{n+1} = F_{n+2}$$

Bemerkungen.

- Der französische Mathematiker Edouard Lucas gab im 19. Jahrhundert dieser Folge den Namen Fibonacci-Folge.
- Die Art der Definition, bei der man die Folgenglieder nacheinander bekommt, nennt man *rekursiv*; im Gegensatz zu einer *expliziten* Definition, bei der man das Folgenglied direkt angeben kann.
  Beispiel: Die Quadratzahlen können explizit definiert werden:
  $$Q_n = n^2 = n \cdot n$$
  Sie können aber auch rekursiv definiert werden:
  $1^2 = 1,\ 2^2 = 1^2 + 3,\ 3^2 = 2^2 + 5,\ 4^2 = 3^2 + 7,\ 5^2 = 4^2 + 9,\ 6^2 = 5^2 + 11, \dots$
  d.h. man bekommt die nächste Quadratzahl, indem man zur vorherigen eine ungerade Zahl addiert, was man leicht im folgenden Bild sieht.

$$\begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & 0 \\ x & x & x & \bullet & 0 \\ + & + & x & \bullet & 0 \\ \star & + & x & \bullet & 0 \end{array} \qquad 1+3+5+7+9 = 5 \cdot 5$$

Im 19. Jahrhundert wurde auch ein explizite Beschreibung der Fibonacci-Folge gefunden.

5. BLATTSTELLUNG

5.1. **Beispiele.** Die Kaninchenaufgabe ist kaum eine realistische Beschreibung von Vorgängen, die so in der Natur vorkommen. (Trotzdem werden wesentliche Merkmale von Wachstumsprozessen beschrieben). Überraschenderweise kann man in der Blattstellung (Phyllotaxis) von vielen Pflanzen auch die Fibonacci-Zahlen finden. Die Fruchtstände sind dann so angeordnet, dass man Spiralen erkennt, die sich kreuzen. Die Anzahl der Spiralen sind oft Fibonacci-Zahlen, wobei es rechtsherum eine andere Zahl als linkherum ist. Beispiele sind Tannenzapfen, Sonnenblumen, Ananas usw.

5.2. **Sind die Blattstellungs-Spiralen Zufall?** Anders gefragt: *Wo lernt eine Pflanze bis 13 zählen?*

Wenn man Gesetzmäßigkeiten in der Natur erkennt, muss man nämlich sehr vorsichtig sein. Menschen neigen nämlich sehr schnell dazu, Zusammenhänge und Ursachen zu erkennen, und sie glauben ungern an so etwas wie Zufall. Das ist sicher oft eine Stärke des menschlichen Geistes, aber Beispiele für den Glauben an unbegründete Zusammenhänge findet man genug. Man mag den Zweck der Naturwissenschaft darin sehen, dass sie Zusammenhänge (Naturgesetze) entdeckt. Andererseits sind die Meilensteine in der Naturwissenschaft oft dadurch entstanden, dass ein allgemein anerkanntes Gesetz als falsch erkannt wurde, z.B.

- die Sonne dreht sich nicht um die Erde
- ein bewegter Körper kommt nicht von selbst in den Ruhezustand (Galilei)
- die Bahn der Planeten sind keine Kreise (Kepler)
- was „gleichzeitig“ bedeutet, ist nicht für alle Beobachter das gleiche. (Einstein)

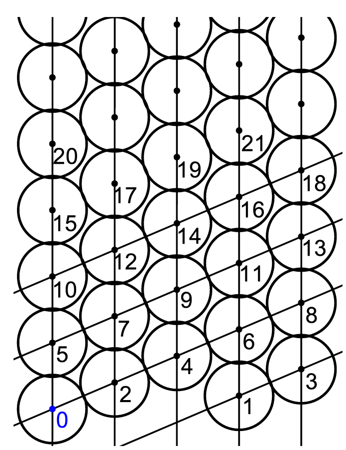
Im Internet findet man auf den Seiten von gewissen Fibonacci-Zahlen-Fans Beispiele wie

- Der Mensch hat 1 Kopf, 2 Arme, 3 Fingergelenke, 5 Finger – alles Fibonacci-Zahlen.

Das hier die Fibonacci-Zahlen rein gar nichts erklären, sieht man schnell ein. Die „kleinen“ Fibonacci-Zahlen stehen unter dem Verdacht, reiner Zufall zu sein. Denn unter den 8 Zahlen von 1 bis 8 gibt es 5 Fibonacci-Zahlen. Man hat also eine gute Chance, ganz zufällig auf eine zu stoßen. Das Verhältnis von Fibonacci-Zahlen zum Rest der ganzen Zahlen ändert sich aber dramatisch, wenn man einen größeren Zahlenabschnitt betrachtet. Wenn man in der Sonnenblume gleich zwei verschiedene „große“ Fibonacci-Zahlen findet, wird man schon ganz schön neugierig, wie das zustande kommt. Und es haben immer wieder auch berühmte Mathematiker wie Alan Turing und H. S. M. Coxeter darüber Artikel geschrieben.

5.3. **Mathematische Modelle.** .

Wenn wir das Bild "Abwicklung 1" ausschneiden und als Röhre zusammenkleben, erhalten wir ein Modell einer Pflanze oder eines Fruchtstandes, wobei die Kreise für Blattansätze stehen. Nach dem Zusammenkleben kann man 2 Schraubenlinien von unten links nach oben rechts erkennen, sowie 3 Schraubenlinien von oben links nach unten rechts. Außerdem erkennt man 5 senkrechte Linien.



Abwicklung 1

In welcher Reihenfolge wachsen die Blattansätze?

Wenn wir das Modell so wählen, dass die Anzahl der Schraubenlinien aufeinanderfolgende Fibonacci-Zahlen sind, liegen alle Blattansätze auf unterschiedlichen Höhen. (Das ist z.B. gar nicht so, wenn die Anzahl rechtsherum und linksherum gleich gewählt wird.)

Wenn die Blattansätze der Höhe nach entstehen, entstehen benachbarte Blattansätze nicht direkt nacheinander. Denn es gibt einen Ansatz, der niedriger liegt als die direkten Nachbarn. Im

Bild sind die Kreise der Höhe nach nummeriert. Die Differenzen der Nummern zu den nächsten Nachbarn sind entweder 2, 3 oder 5. In unserem Beispiel ist der nächste Ansatz jeweils um 3 senkrechte Reihen versetzt, also um 3/5 des Kreisumfangs versetzt.

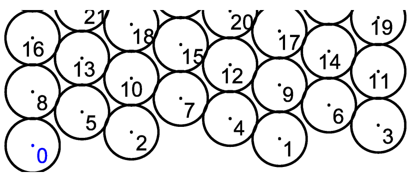
5.3.1. *Wie konstruiert man eine Abwicklung mit anderen Schraubenlinien?* Eine Methode ist naheliegend: Man konstruiert senkrechte und schräge Geraden wie im Bild, nur mit anderen Anzahlen und Ganghöhen.

Eine aufschlussreichere Methode bekommt man, wenn man folgendes bemerkt:

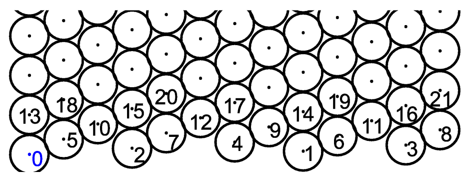
Von einem zum nächstes wachsenden Blattansatz muss man immer denselben Weg zurücklegen. Im Bild sieht man sofort, dass der Weg von 0 nach 1 genau dem von 2 nach 3 entspricht. Dass das auch für den Weg von 3 nach 4 gilt, sieht man erst, wenn man das Modell zu einem Zylinder zusammengeklebt hat.

Im Beispiel musste man von einem Ansatz zum nächsten um 3 senkrechte Linien nach rechts weitergehen, das entspricht 3/5 des Kreisumfanges. Auch nach oben muss man immer um dieselbe Höhe weitergehen. Mit dem Geometrie-Programm kseg kann man schneller als mit Papier und Bleistift nachsehen, was passiert, wenn man statt 3/5 andere Zahlen aus der Fibonacci-Folge nimmt, z.B. 5/8 oder 8/13.

Der Erfolg stellt sich ein, wenn man auch den Höhenabstand ein bisschen ändert.



Abwicklung 2



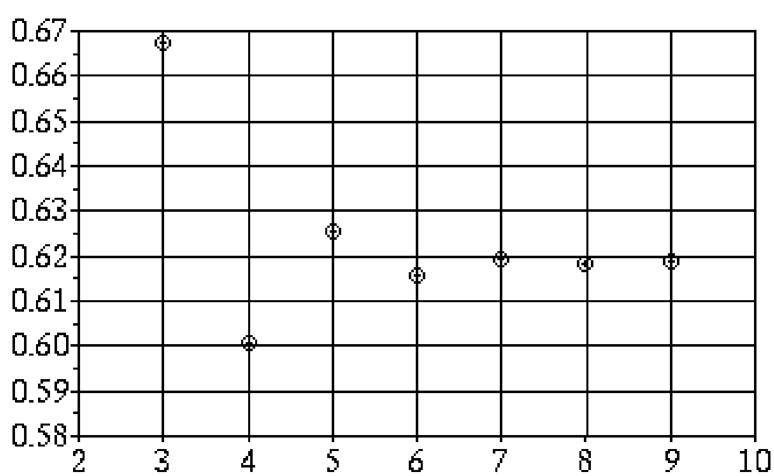
Abwicklung 3

Es fällt auf, dass manche Nachbarschaften von den Kreisen in den Bildern in etwa erhalten bleiben, so ist z.B. die Folge der Kreise mit den Nummern $2 \cdot 7 \cdot 12 \cdot 17$ in allen drei Abbildungen zu finden.

Wir betrachten den Abstand zwischen zwei nacheinander wachsenden Kreisen (, der immer gleich dem Abstand zwischen den beiden Kreisen 0 und 1 ist). Im ersten Bild beträgt der Abstand 3 senkrechte Linien, im zweiten 5, im dritten 8. Das entspricht 3/5, 5/8 bzw 8/13 des gesamten Umfangs der Pflanzen, weil es dort insgesamt 5, 8 bzw. 13 senkrechte Linien gibt.

Wenn man das als Dezimalzahlen ausrechnet, macht man eine interessante Entdeckung:

$$\varphi_3 = \frac{F_2}{F_3} = \frac{2}{3} = 0,6666...$$
$$\varphi_4 = \frac{F_3}{F_4} = \frac{3}{5} = 0,6$$
$$\varphi_5 = \frac{F_4}{F_5} = \frac{5}{8} = 0,625$$
$$\varphi_6 = \frac{F_5}{F_6} = \frac{8}{13} = 0,61538...$$



Diese Zahlen pendeln hin und her und der Unterschied zwischen einer zur nächsten wird immer geringer.

5.3.2. *Gibt es einen Grenzwert der Folge 2/3, 3/5, 5/8, 8/13, ...?* Wir diskutieren jetzt nicht die Frage, was der Begriff „Grenzwert" genau heißen soll, sondern pirschen uns auf einem Umweg an einen Grenzwertkanditaten heran:

Die Strecke AB habe die Länge 1. Wenn wir die Strecke um das Pflanzenmodell herumlegen, sodass der Punkt A im Mittelpunkt des Kreises 0 beginnt und der Punkt B auch dort wieder endet, so soll der Punkt C die Stelle markieren, über der der Mittelpunkt des Kreises 1 liegt. Dann haben wir in den obigen 3 Bildern folgende Verhältnisse:

$$Abwicklung\,1: \quad \frac{AC}{AB} = \frac{3}{5} \quad \frac{CB}{AC} = \frac{2}{3}$$
$$Abwicklung\,2: \quad \frac{CB}{AC} = \frac{5}{8} \quad \frac{CB}{AC} = \frac{3}{5}$$
$$Abwicklung\,3: \quad \frac{AC}{AB} = \frac{8}{13} \quad \frac{CB}{AC} = \frac{5}{8}$$

Je größer die Zahlen werden, desto mehr gilt

$$\frac{AC}{AB} \approx \frac{CB}{AC}$$

Frage: Kann man den Punkt C so finden, dass

$$\frac{AC}{AB} = \frac{CB}{AC} \quad ?$$

Wegen der besseren Übersicht bezeichnen wird die Länge AC mit φ. Wegen $AB = 1$, $CB = 1 - AC$ lautet die Bedingung

$$\frac{\varphi}{1} = \frac{1-\varphi}{\varphi}$$

Durch Multiplikation beider Gleichungsseiten mit φ bekommt man die Gleichung

$$\varphi^2 = 1 - \varphi$$

Diese quadratische Gleichung hat 2 Lösungen: $(-\sqrt{5}-1)/2$ und $(\sqrt{5}-1)/2$. Weil wir eine Zahl zwischen 0 und 1 gesucht haben, bleibt nur eine übrig:

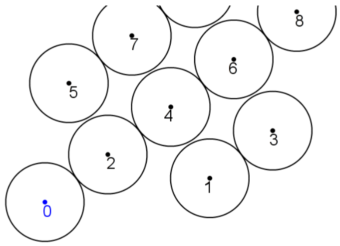
$$\varphi = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0,6180339887...$$

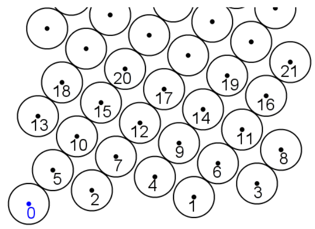
Diese Zahl nennt man den Goldenen Schnitt.

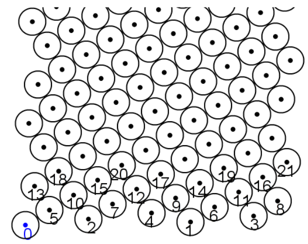
5.4. **Blattstellung mit Goldenem Schnitt als Winkel zwischen aufeinanderfolgenden Blattansätzen.** Was passiert wenn der Winkel α von einem zum nächsten wachsenden Blatt immer genau vom Goldenen Schnitt bestimmt ist?

$$\alpha = \varphi \cdot 360^\circ = 222,492...^\circ$$

Computermodelle zeigen, dass dann die Anzahl der sichtbaren Spiralen zu **jeder beliebigen Fibonacci-Zahl** gemacht werden kann. Dazu muss man nur den Dichte der Blattansätze in Wachstumsrichtung ändern.

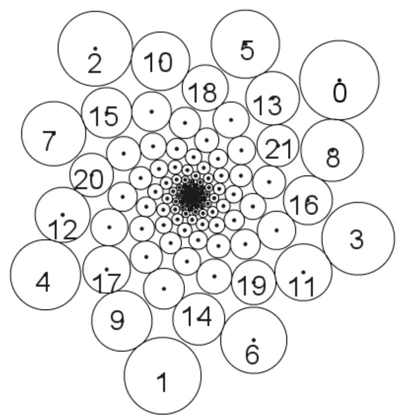






In diesen 3 Abbildungen sind die waagerechten Positionen der Kreismittelpunkte mit den gleichen Nummern gleich. Nur senkrecht sind sie unterschiedliche dicht zusammen geschoben. Die Kreise haben einen anderen Durchmesser, damit man die schrägen Linien besser erkennen kann.

Aus der Frage
„Wo lernt eine Pflanze bis 34 zählen¿‘
ist die Frage
„Wie weiß eine Pflanze den Winkel α so genau¿‘
geworden.
Das Rätsel der vielen Fibonacci-Zahlen hat sich auf das Rätsel eines Winkels reduziert. Aber wir sind mit diesem Winkel als Antwort auf das Geheimnis der Blattstellung eigentlich immer noch unzufrieden.



Einen anderen Aspekt zeigen die Computermodelle: Egal wie man den Abstand der Schraubenlinien wählt, mit dem Goldenen Schnitt als Grundlage erscheinen die Blattansätze immer gleichmäßig dicht gepackt, d.h. es treten keine größere Lücken oder Klumpen von Blattansätzen auf.

Man ist geneigt, die Umkehrung dieser Aussage zu vermuten:

Vermutung: *Wenn die Blattansätze dicht gepackt sein wollen, rutschen sie natürlicherweise so zusammen, dass ungefähr der Winkel α zwischen zwei Blattansätzen erscheint.*

Man stellt sich für das Prinzip der „dichtesten Packung“ folgendes vor:

(1) Die Blattansätze entstehen nacheinander, während die Pflanze wächst, wobei an der jüngsten Spitze selbst kein Blattansatz wächst. (Andernfalls könnte die Pflanze in diese Richtung nicht mehr weiterwachsen.)
(2) Der nächste Blattansatz entsteht dort, wo der meiste Platz ist, d.h. wo im neue gewachsenen Abschnitt der eine Stelle mit dem größten Abstand zur Spitze und zu den bereits exisitierenden Blattansätzen ist.

Wenn nun bereits ein oder zwei Runden von Blattansätzen nach dem Prinzip des Goldenen Schnittes gewachsen sind, setzt sich das System von selbst fort; denn man sieht in den obigen Beispielbildern, dass die Stelle mit dem nächsten größten Platz immer dort ensteht, wo auch der Winkel α hinweist.

Stellen wir uns vor, es sei ein Anfang mit Schraubenlinien gemacht, die mit kleinen Fibonacci-Zahlen gezählt werden. Daraus entsteht von selbst ein System mit größeren Fibonacci-Zahlen, indem bloß die exisitierenden Blattansätze dichter in Wachstumsrichtung zusammengeschoben werden, oder - was auf den gleichen Effekt hinaus läuft - indem die Ansätze durch das Breitenwachstum auf dem Umfang der Pflanze mehr Platz bekommen und in dieser Richtung deshalb auseinanderrücken können. Das kann man an den obigen mathematischen Modellen gut beobachten.

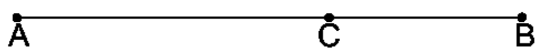
Nach diesen Überlegungen bleibt nur noch folgende Frage übrig:

Wie kommt das System der Fibonacci-Schraubenlinien am Anfang in Gang? Genauer: Wie ordnen sich die ersten 3 Blattansätze?

Dass es hier keine zwangsläufige Entwicklung gibt, ist klar, weil es ja genügend Pflanzen gibt, die nicht nach diesem System wachsen. Aber trotzdem kann man sich auch den Anfang recht unkompliziert vorstellen: Der Blattansatz 0 wächst irgendwo. Nachdem die Pflanze ein Stück gewachsen ist, entsteht der meiste Platz genau gegenüber, sodass sich Blattansatz 1 zunächst um 180ř versetzt befindet. Blattansatz 2 entsteht zufällig in der rechten oder linken Hälfte (vielleicht da, wo die Sonne mehr geschienen hat) und wird dichter an Blattansatz 0 liegen, weil Blattansatz 0 weiter weg von der Spitze der Pflanze liegt als Blattansatz 1. Nun wird Blattansatz 2, wenn er größer wird, den dichter an ihm liegenden Blattansatz 1 etwas zur Seite drücken, so dass dieser dann dem Blattansatz 0 näher kommt. Damit ist der Anfang gemacht.

6. Der goldene Schnitt

Der goldene Schnitt war bereits den Pythagoräern im 4. Jahrhundert v.Chr. bekannt. Er ist als die Unterteilung einer Strecke definiert, bei der das Verhältnis des kleineren zum größeren Teil gleich dem Verhältnis des größeren Teils zur ganzen Strecke ist. (Da ist doch eine Gleichung und eine Skizze leichter zu verstehen als der letzte Satz!).



Ein Rechteck, dessen eine Seite die andere Seite im goldenen Schnitt teilt, nennt man goldenes Rechteck.

$$\varphi = \frac{AC}{AB} = \frac{CB}{AC} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0,6180339887\ldots$$

Aus der Grundgleichung

$$\varphi^2 + \varphi = 1 \tag{6.1}$$

können wir einen Reihe von interessanten Folgerungen ziehen. Durch Multiplikation mit φ folgt

$$(\varphi^2 + \varphi) \cdot \varphi = \varphi$$

$$\varphi^3 + \varphi^2 = \varphi \tag{6.2}$$

Durch Wiederholung der Multiplikation erhält man

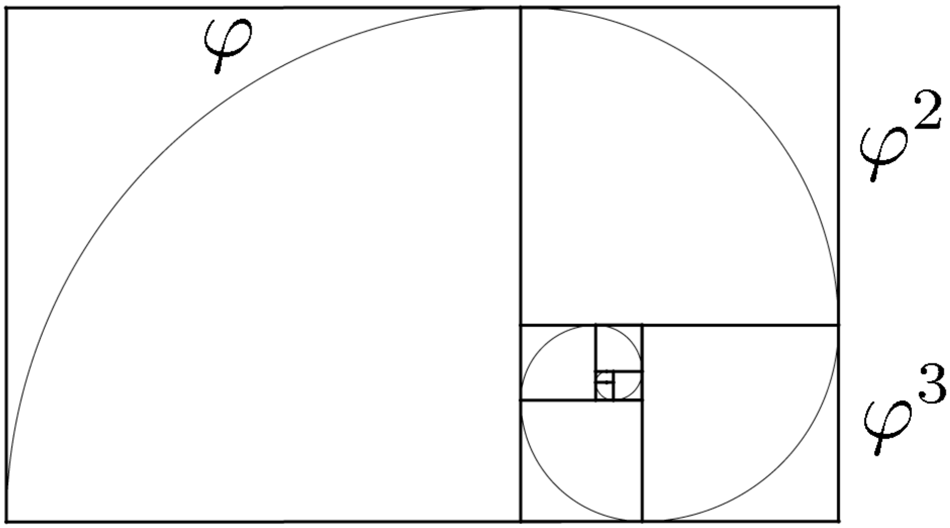
$$\varphi^4 + \varphi^3 = \varphi^2 \tag{6.3}$$

$$\varphi^5 + \varphi^4 = \varphi^3$$

usw. Allgemein geschrieben

$$\varphi^{n+2} + \varphi^{n+1} = \varphi^n$$

Man kann diese Formeln im wiederholt unterteilten Goldenen Rechteck anschaulich machen. Vom Rechteck mit den Seitenlängen 1 und φ wird das große Quadrat abgeschnitten. Es bleibt ein Rechteck mit den Seitenlängen φ und φ^2übrig, was wieder ein Goldenes Rechteck ist, weil das Verhältnis der Seitenlängen $\varphi^2/\varphi = \varphi$ wieder der Goldenen Schnitt ist. Von diesem kleineren Rechteck schneiden wir wieder ein Quadrat ab, so dass ein Rechteck mit den Seitenlängen φ^2 und φ^3übrig bleibt. Und so geht es weider. Man findet die obigen Gleichungen in der folgenden Skizze wieder.

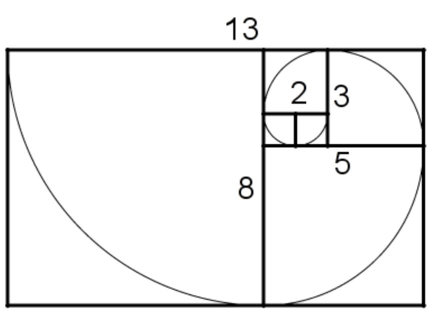


In jedem Quadrat kann man ein Kreisviertel zeichnen, so dass sich eine spiralenartige Figur ergibt. (Eine richtige Spirale besteht nicht aus Kreisabschnitten, sondern ändert den Radius ständig.)

Im Blattstellungs-Modell kommt ein neuer Blattansatz immer im Goldenen Schnitt zwischen 2 alten Ansätzen zu liegen. (Das ist etwas knifflig zu beweisen.)

6.1. **Zum Zusammenhang zwischen dem Goldenen Schnitt und den Fibonacci-Zahlen.** Dass der Goldene Schnitt φ und die Fibonacci-Zahlen zusammenhängen, konnte man – mit Erstaunen – in den geometrischen Modellen zur Blattstellung sehen. Dass dieser Zusammenhang auch rein rechnerisch bestätigt werden kann, soll in diesem Abschnitt gezeigt werden.

Doch vor den blanken Zahlen erst nochmal ein Bild



Die Konstruktion beginnt ganz innen mit zwei Quadrat mit der Seitenlänge 1, daran wird ein Quadrat mit der Seitenlänge 2 angefügt, dann weiter mit den Seitenlängen 3,5,8,13,...
Während die Unterteilung des Goldenen Rechtecks nach innen kein Ende findet, gibt es hier die beiden kleinsten Quadrate, mit denen alles anfängt.

Nun aber die versprochenen Zahlen.

Theorem. *Folgende Zeilen gelten unendlich fortgesetzt:*

$$1 = runde(\frac{1}{\varphi^1 \cdot \sqrt{5}}) = runde(0,7236) \qquad 1 - 1\varphi = +\varphi^2 \qquad \frac{1}{1} = \varphi - \frac{\varphi^2}{1} = \varphi + 0,381...$$
$$1 = runde(\frac{1}{\varphi^2 \cdot \sqrt{5}}) = runde(1,1708) \qquad 1 - 2\varphi = -\varphi^3 \qquad \frac{1}{2} = \varphi - \frac{\varphi^3}{2} = \varphi - 0,118...$$
$$2 = runde(\frac{1}{\varphi^3 \cdot \sqrt{5}}) = runde(1,8944) \qquad 2 - 3\varphi = +\varphi^4 \qquad \frac{2}{3} = \varphi + \frac{\varphi^4}{3} = \varphi + 0,048...$$
$$3 = runde(\frac{1}{\varphi^4 \cdot \sqrt{5}}) = runde(3,0652) \qquad 3 - 5\varphi = -\varphi^5 \qquad \frac{3}{5} = \varphi - \frac{\varphi^5}{5} = \varphi - 0,018...$$
$$5 = runde(\frac{1}{\varphi^5 \cdot \sqrt{5}}) = runde(4,9596) \qquad 5 - 8\varphi = +\varphi^6 \qquad \frac{5}{8} = \varphi + \frac{\varphi^6}{8} = \varphi + 0,006...$$
$$8 = runde(\frac{1}{\varphi^6 \cdot \sqrt{5}}) = runde(8,0249) \qquad 8 - 13\varphi = -\varphi^7 \qquad \frac{8}{13} = \varphi - \frac{\varphi^7}{13} = \varphi - 0,002...$$
$$13 = runde(\frac{1}{\varphi^7 \cdot \sqrt{5}}) = runde(12,984) \qquad 13 - 21\varphi = +\varphi^8 \qquad \frac{13}{21} = \varphi + \frac{\varphi^8}{21} = \varphi + 0,001...$$

Bevor wir diese Gleichungen beweisen, erst ein paar Bemerkungen:

- Mit den Gleichungen in der erste Spalte kann man eine Fibonaccizahl sofort mit dem Taschenrechner ausrechnen, ohne dass man erst einmal alle vorherigen Fibonaccizahlen ausrechnen muss. Man freue sich aber nicht zu früh: Damit es funktioniert, müssen zunächst φ und $\sqrt{5}$ auf genügend viele Stellen berechnet werden. Man spart in Wirklichkeit keine Rechenarbeit.
- Weil die Zahlen φ^2, φ^3, φ^4, φ^5, φ^6, ...immer kleiner werden („so klein wie man will"), bedeuten die Gleichungen in der zweiten Spalte, dass die Zahlen 2φ, 3φ, 5φ, 8φ, 13φ, ... immer dichter an den ganzen Zahlen 3, 5, 8, 13, 21,... liegen. Das entspricht der Beobachtung, dass in den Bildern aus Abschnitt 5.4 diejenigen Punkte, die mit Fibonaccizahlen nummeriert sind, immer dichter am Rand zu liegen kommen.
- Die 3. Spalte ist eine exakte Bestätigung der Vermutung aus Abschnitt 5.3.2: Die Brüche aus zwei aufeinanderfolgenden Fibonaccizahlen kommen dem Goldenen Schnitt φ sehr nahe. Man sagt: φ ist der Grenzwert der Fibonacci-Brüche.

Am einfachsten sind die Gleichungen in der mittleren Spalte zu beweisen:

Beweis. Die Grundgleichung (6.1) kann man umschreiben in

$$1 - \varphi = +\varphi^2 \tag{6.4}$$

Wenn man auf beiden Seiten φ abzieht und (6.2) anwendet, entsteht

$$1 - 2\varphi = \varphi^2 - \varphi = -\varphi^3$$

Also

$$1 - 2\varphi = -\varphi^3 \tag{6.5}$$

Addiere jetzt die Gleichungen (6.4) und (6.5) :

$$2 - 3\varphi = \varphi^2 - \varphi^3$$

Wegen (6.3) ist das.

$$2 - 3\varphi = +\varphi^4 \tag{6.6}$$

Durch Addition von (6.5) und (6.6) folgt jetzt ähnlich.

$$3 - 5\varphi = -\varphi^5$$
$$5 - 8\varphi = +\varphi^6$$

Und so geht es weiter, es erscheinen nacheinander Fibonacci-Zahlen in der allgemeinen Form:

$$F_{n-1} - F_n \cdot \varphi = (-\varphi)^n$$

□

Jetzt folgt der Beweis der letzten Spalte des Theorems:

Beweis. Die Gleichungen (6.4) , (6.5), (6.6) usw. kann man umschreiben:

$$\begin{aligned} 1 &= 1\varphi + \varphi^2 \\ 1 &= 2\varphi - \varphi^3 \\ 2 &= 3\varphi + \varphi^4 \\ 3 &= 5\varphi - \varphi^5 \\ 5 &= 8\varphi + \varphi^6 \end{aligned}$$

Um die rechte Spalte des Theorems zu erhalten, muss man die 1. Gleichung durch 1 dividieren, die 2. durch 2, die 3. durch 3, die 4. durch 5, die 5. durch 8, usw. Allgemein kann man schreiben:

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} = \varphi + \frac{(-\varphi)^n}{F_n}$$

□

Obwohl die erste Spalte des Theorems am leichtesten zu verstehen ist, ist der Beweis dafür am längsten. Es ist dazu nötig, das folgenden zu beweisen.

Theorem. *Die Formeln von Binet:*

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1}{\varphi^1} + \varphi^1) \\ 1 &= \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1}{\varphi^2} - \varphi^2) \\ 2 &= \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1}{\varphi^3} + \varphi^3) \\ 3 &= \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1}{\varphi^4} - \varphi^4) \\ 5 &= \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1}{\varphi^5} + \varphi^5) \\ 8 &= \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1}{\varphi^6} - \varphi^6) \\ 13 &= \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1}{\varphi^7} + \varphi^7) \end{aligned}$$

usw.

Bemerkung. Die Formeln werden nach dem französischen Mathematiker J. P. M. Binet (1786-1856) benannt. Sie wurden aber auch schon von A. de Moivre (1667-1754) aufgestellt, was lange in Vergessenheit geriet.

Das zeigt einen weiteren Zusammenhang zwischen den Fibonacci-Zahlen und dem Goldenen Schnitt: Man kann die Fibonacci-Zahlen direkt und exakt aus dem Goldenen Schnitt berechnen. Die erste Spalte von Theorem 6.1 folgt aus diesen Gleichungen sofort, indem man die Terme ganz rechts in den Gleichungen weglässt, denn sie sind klein genug, dass sie beim Runden der Zahlen keine Rolle spielen:

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \varphi = 0,27.. < 0.5$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \varphi^2 = 0,17.. < 0.5$$

usw.

Beweis. Es sei $\phi = (-\sqrt{5}-1)/2 = -1,6180339887\ldots$ die andere Lösung der Grundgleichung

$$\varphi^2 + \varphi = 1$$

aus Abschnitt 5.3.2. Weil nun die mittlere Spalte des Theorems 6.1 nur mit Hilfe der Grundgleichung bewiesen wurden, kann man den ganzen Beweis nochmal benutzen um die folgenden entsprechenden Zeilen zu erhalten:

$$\begin{array}{rr} 1-1\varphi = +\varphi^2 & 1-1\phi = +\phi^2 \\ 1-2\varphi = -\varphi^3 & 1-2\phi = -\phi^3 \\ 2-3\varphi = +\varphi^4 & 2-3\phi = +\phi^4 \\ 3-5\varphi = -\varphi^5 & 3-5\phi = -\phi^5 \\ 5-8\varphi = +\varphi^6 & 5-8\phi = +\phi^6 \\ 8-13\varphi = -\varphi^7 & 8-13\phi = -\phi^7 \\ 13-21\varphi = +\varphi^8 & 13-21\phi = +\phi^8 \end{array}$$

Wenn man die beiden Gleichungen in der ersten Zeile subtrahiert, bekommt man:

$$\begin{array}{rcll} 1-1\phi & = & +\phi^2 & \\ 1-1\varphi & = & +\varphi^2 & \\ 1(-\phi+\varphi) & = & +\phi^2-\varphi^2 & \mid /(\varphi-\phi) \\ 1 & = & \dfrac{\phi^2-\varphi^2}{\varphi-\phi} & \end{array}$$

Aus den Zeilen 2, 3, ... ergibt sich auf dieselbe Weise

$$\begin{array}{rcl} 2 & = & -\dfrac{\phi^3-\varphi^3}{\varphi-\phi} \\ 3 & = & +\dfrac{\phi^4-\varphi^4}{\varphi-\phi} \\ 5 & = & -\dfrac{\phi^5-\varphi^5}{\varphi-\phi} \\ 8 & = & +\dfrac{\phi^6-\varphi^6}{\varphi-\phi} \end{array}$$

usw. Den Nenner kann man vereinfachen

$$\varphi - \phi = \frac{\sqrt{5}-1}{2} - \frac{-\sqrt{5}-1}{2} = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{5}-1+1}{2} = \sqrt{5}$$

Wenn man in den Zählern der obigen Gleichungen auch noch ϕ durch $-1/\varphi$ ersetzt, ergeben sich die gewünschten Formeln von Binet. □

Februar 2004

URL: `http://www.uni-giessen.de/~g013`